EL ECLIPSE TOTAL DE LUNA

DEL

15 de Noviembre de 1891,

CALCULADO PARA EL MERIDIANO DE SAN JOSÉ

SEGÚN EL MÉTODO DE W. CHAUVENET,

POR

Pedro Reitz,

Jefe de servicio en el Instituto Físico-geográfico Nacional.

SAN JOSÉ DE COSTA RICA.

Tipografía Nacional.

1891.

EL ECLIPSE DE LUNA

DEL 15 DE NOVIEMBRE DE 1891

Calculado para el meridiano de San José de Costa Rica según el método de Chauvenet.

La predicción de los eclipses de Sol y de Luna así como también la de la ocultación de un planeta ó de una estrella por el disco de la Luna es una de las más bellas aplicaciones de las Matemáticas superiores á la Astronomía práctica.

En esta nota solo nos ocuparemos del cálculo de los eclipses de Luna, que demostraremos empleándolo para la predicción de las varias fases del eclipse total del 15 de Noviembre del corriente año.

El trabajo se divide en dos partes: 1. El examen de la posibilidad de que se puede verificar un eclipse de Luna y 2. La determinación rigurosa del tiempo en que se efectuarán las distintas fases del fenómeno.

Un eclipse de Luna es visible para todos los observadores que tienen la Luna sobre su horizonte durante el tiempo que trascurre entre el principio y el fin del suceso.

Un eclipse de Luna puede ocurrir en el tiempo del plenilunio únicamente.

Pasando á la resolución de nuestro problema procederemos luego á la determinación del semi-diámetro aparente de la sombra proyectada por la Tierra en la distancia donde ha de pasar el disco lunar.

Este semi-diámetro es igual á

$$\pi - s' + \pi'$$

en que significa:

π Paralaje horizontal ecuatorial de la Luna.
π' „ „ „ del Sol.
s' Semi-diámetro aparente del Sol.

Pero, habiendo demostrado la observación que la atmósferá terrestre aumenta el diámetro de la sombra por la 1/50 parte, tendremos en realidad

Semi-diámetro aparente de la sombra=

$$51/50\ (\pi - s' + \pi') \qquad (1)$$

Por consiguiente, un eclipse de Luna solo puede verificarse en la condición siguiente:

$$\beta \cos I' < 51/50\ (\pi - s' + \pi') + s \qquad (2)$$

en que:

β=Latitud de la Luna en el tiempo de la oposición.

I=Inclinación de la órbita de la Luna sobre la eclíptica.

s=Semi-diámetro de la Luna.

Llamando:

II.

λ=Cociente del movimiento de la Luna en longitud divido por el mismo del Sol encontramos I' por medio de la ecuación siguiente:

$$\text{tang } I' = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \text{ tang } I. \tag{3}$$

Poniendo ahora para I' en la ecuación (2) un término medio, obtendremos:

$$\beta < [51/50 (\pi - s' + \pi') + s] \times 1.00472.$$

Además, admitiendo términos medios para para las pequeñas fracciones, tenemos:

$$[51/50 (\pi - s' + \pi') + s] \times 00472 = 16''$$

de lo cual resulta:

$$\beta < 51/50 (\pi - s' + \pi') + s + 16'' \tag{4}$$

Aplicando luego los valores mayores de π, π', s, y el valor mínimum de s' obtenemos la expresión siguiente:

$$\beta < 63' \, 53''$$

como limite superior de la latitud de la Luna en el tiempo de su oposición en que se puede producir un eclipse.

Empleamos ahora en fórmula (4) los valores menores de π', π, s y el valor maximum de s' y veremos que cuando

$$\beta < 52' \, 4''$$

ha de producirse un eclipse infaliblemente.

Esto quiere decir pues, que:

Un eclipse de Luna por una parte tiene necesariamente que verificarse cuando en la hora del plenilunio β es menor que 52 4 ; que por otra parte es imposible cuando β es mayor que $63' \, 53''$ y dudoso cuando β se encuentra entre estos límites. Los casos dudosos deben entonces examinarse rigurosamente según (4) y si fuere preciso según (2) poniendo en las ecuaciones aquellos valores de π, π', s, s' que corresponden á la hora dada y calculando igualmente I' para obtener su valor exacto. Los límites arriba expresados son para la sombra.

Para la penumbra tenemos:

Semi-diámetro de la penumbra=

$$51/50 \ (\pi + s' + \pi') \tag{5}$$

Por consiguiente podemos también emplear la ecuación (2) para determinar si la Luna pasará ó nó por alguna parte de la penumbra; pero es menester entonces cambiar el signo de s' poniendo $+ s'$ en lugar de $- s'$.

Apliquemos ahora lo desarrollado á un caso concreto.

Examinemos la oposición del 15 de Noviembre de 1891. Ésta tiene lugar á las 6^h-$32^m \, 4,^s 9$ tiempo médio de San José en ascensíón recta.

Pará esta hora los varíos anuarios astronómicos nos dan por interpolación el valor de

$$\beta = 16' \, 2''$$

Siendo éste menor que $52' \, 4''$ resulta que el eclipse de la Luna es una necesidad absoluta y podemos ya dispensarnos de un examen más detenido.

III.

Pasemos de una vez pues á la resolución de la segunda parte de nuestro problema, es decir, al cálculo exacto de las horas del principio y del fin de las distintas fases.

Sea

S= Aquel punto de la esfera celeste diametralmente opuesto al Sol y que corresponde al centro de la sombra terrestre vista desde el centro de la Tierra.

M= El lugar, igualmente geocéntrico, del centro de la Luna.

P = Polo norte del cielo.

α = Ascensión recta de la Luna.

α'= „ „ del punto S = Ascensión recta del Sol + 180°.

δ = Declinación de la Luna.

δ'= „ del Sol.

Q= Ángulo P S M.

L= S M

entonces será:

$-\delta'$= Declinación de S

y se reciben del triángulo P S M las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} &\text{sen L sen Q} = \cos\delta \ \text{sen} (\alpha - \alpha') \\ &\text{sen L cos Q} = \cos\delta' \ \text{sen}\ \delta + \text{sen}\ \delta' \cos\delta \cos(\alpha - \alpha') \end{aligned} \tag{6}$$

El eclipse comienza ó termina cuando el arco S M es igual á la suma de los semidiámetros aparentes de la Luna y de la sombra.

Pero como la figura de la sombra difiere un poco de la de un círculo á consecuencia de ser la Tierra un esferoide, es preciso reducir el paralaje horizontal ecuatorial π de la Luna á 45° de latitud, considerando la Tierra como una esfera con un radio medio.

Esto se efectua por medio de la fórmula siguiente:

$$\pi_{,} = (9.99929)\ \pi \tag{7}$$

en que damos en lugar del factor mismo su logaritmo.

Entonces tiene lugar el primero y último contacto de la Luna con la penumbra cuando

$$\text{L} = 51/50\ (\pi_{,} + s' + \pi') + s \tag{8}$$

y el primero y último contacto con la sombra cuando

$$\text{L} = 51/50\ (\pi_{,} - s' + \pi') + s. \tag{9}$$

El primero y segundo contacto interno con la penumbra cuando

$$\text{L} = 51/50\ (\pi_{,} + s' + \pi') - s \tag{10}$$

El primero y segundo contacto interno con la sombra, lo que corresponde al principio y fin del eclipse total, cuando

$$\text{L} = 51/50\ (\pi_{,} - s' + \pi') - s. \tag{11}$$

La resolución del problema consiste pues en encontrar la hora en que se disuelven las ecuaciones (6) si se emplean en ellas los valores correspondientes de L.

Pero, siendo en los eclipses de Luna los puntos de contacto tan mal definidos que es imposible observar con gran precisión los momentos del principio y del fin de cada fase, úsase generalmente la fórmula simplificada, fácilmente derivada de (6)

$$\begin{aligned} &\text{L sen Q} = (\alpha - \alpha') \cos\delta \\ &\text{L cos Q} = \delta + \delta' - \frac{\text{sen}\ 2\ \delta\ \text{sen}^2 \frac{1}{2} (\alpha - \alpha')}{\text{sen}\ 1''} \end{aligned} \tag{12}$$

Pongamos ahora

IV.

$$\varepsilon = \frac{\text{sen } 2\,\delta \text{ sen}^2 \tfrac{1}{2}(\alpha - \alpha')}{\text{sen } 1''} \qquad (13)$$

$$x = (\alpha - \alpha') \cos \delta \qquad (14)$$

$$y = \delta + \delta' - \varepsilon \qquad (15)$$

$$x_o,\ y_o = \text{Variación horaria de x é y} \qquad (16)$$

Es evidente que obtendrémos x_o é y_o de las diferencias si calculamos x é y para varias horas consecutivas cerca de la oposición y si designamos con x_1 é y_1 los valores de x é y para una hora muy cerca del plenilunio, entonces tenemos para

$$T = T_o + \tau = \text{hora requerida del contacto}$$

las ecuaciones.

$$L \text{ sen } Q = x_1 + x_o \tau$$
$$L \cos Q = y_1 + y_o \tau$$

de las cuales fácilmente se saca τ

Determinemos ahora los valores auxiliares m, M, n, N por medio de

$$m \text{ sen } M = x_1 \qquad n \text{ sén } N = x^\circ$$
$$m \cos M = y_1 \qquad n \cos N = y^\circ \qquad (18)$$

y sigamos:

$$\text{sen } \psi = \frac{m \text{ sen } (M - N)}{L}$$

$$\tau = \frac{L \cos \psi}{n} \quad \frac{m \cos (M - N)}{n} \qquad (19)$$

$$T = T_o + \tau$$

en que hay que usar cos ψ negativamente para el primer contacto y positivamente para el segundo csntacto.

El medio de eclipse será:

$$T, = T_o - \frac{m \cos (M - N)}{n} \qquad (20($$

Formando el ángulo Q casi exactamente el suplemento del ángulo P M S resulta que pasando del Norte por el Este debe el ángulo de posición de los puntos de contacto ser igual á

$$180^\circ + N + \psi \qquad (21)$$

Supongamos en fin que Δ sea la menor distancia de los centros de la Luna y de la sombra, tendremos

$$\Delta = \pm\, m \text{ sen } (M - N) \qquad (22)$$

y llamando D la magnitud del eclipse con relación al diámetro aparente de la Luna tomado como unidad

$$D = \frac{L - \Delta}{2\,s}$$

en la cual hay que poner para L el valor correspondiente á la sombra (9) —

Procedamos en fin á determinar las horas de las fases del eclipse de Luna del 15 de Noviembre de 1891.

La hora de la oposición en ascensión recta es, como ya dijimos 6 h 32^m $4,^s 9$ tiempo médio de San José de Costa Rica.

Comenzaremos á calcular x é y para las tres horas 3 h, 6 h y 9 h.

V.

Calculo para las 3 h.

α	Ascensión recta de la Luna	3 h 15 m 24, s 72
α'	„ „ del Sol+180°	3 h 23 m 18, s 64
$\alpha-\alpha'$		—0 h 7 m 53, s 92
$(\alpha-\alpha')$	en segundos de arco	7108″, 80
δ	Declinación de la Luna	17°36′ 35″, 58
δ'	„ del Sol	—18°35′ 25″. 76
$-\varepsilon$	(Corrección)	—35″, 32
y	$(y=\delta+\delta-\varepsilon)$	—3565″, 50
log $(\alpha-\alpha')$		n 3.8517963
log. cos δ		9.9791560
log. x	$(x=(\alpha-\alpha')\cos\delta)$	3.8309523
x		6775.″ 67

Cálculo de la corrección ε

$$\varepsilon = \frac{\text{sen } 2\,\delta \text{ sen}^2 \tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')}{\text{sen } 1''}$$

δ	17° 36′ 35″, 58
$2\,\delta$	35° 13′ 11″, 16
$\alpha-\alpha'$	1° 58′ 28″, 80
$\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')$	0° 59′ 14″, 40
log. sen² δ	9.7609607
log. sen² $\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')$	16.4726386
log. del numerador	26.2335993
log. sen 1″	4.6855749
log. ε	21.5480244
ε	35″, 32

Cálculo para las 6 h.

α_1	Ascensión recta de la Luna	3 h 22 m 38 s, 57
α'_1	„ „ del Sol+180°	3 h 23 m 49 s, 61
$(\alpha_1-\alpha'_1)$		—0 h 1 m 11 s, 04
$(\alpha_1-\alpha'_1)$	en segundos de arco	—1065″, 60
δ_1	Declinación de la Luna	18° 14′ 31″, 63
δ'_1	„ del Sol	—18° 37′ 18″, 59
$-\varepsilon_1$	(corrección)	—0″. 80
$-y_1$	$(y_1=\delta_1+\delta'_1-\varepsilon_1)$	—1367″, 76
log. $(\alpha_1-\alpha'_1)$		3.0275942
log. cos δ_1		9.9776058
log. x_1	$(x_1=(\alpha_1-\alpha'_1)\cos\delta_1)$	13.0052000
x_1		1012″, 05

Cálculo de la corrección ε_1

$$\varepsilon_1 = \frac{\text{sen } 2\,\delta_1 \text{ sen}^2 \tfrac{1}{2}(\alpha_1-\alpha'_1)}{\text{sen } 1''}$$

δ_1	18° 14′ 31″, 63
$2\,\delta_1$	36° 29′ 3″, 26
$(\alpha_1-\alpha'_1)$	0° 17′ 45″, 60
$\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha'_1)$	0° 8′ 47″, 80
log. sen² δ_1	9. 7742261

log. sen $^2 \frac{1}{2} (\alpha_1 - \alpha'_1)$	14. 8160608
log. del numerador	24. 5902869
log. sen $1''$	4. 6855749
log. ε_1	19. 9047120
ε_1	$0''$, 80

CÁLCULO PARA LAS 9 h.

α_2 Ascención recta de la Luna	3 h 29 m 54 s, 59
α'_2 " de Sol + 180°	3 h 24 m 20 s, 54
$(\alpha_2 - \alpha'_2)$	0 h 5 m 34 s, 05
$(\alpha_2 - \alpha'_2)$ en segundos de arco	$5010''$, 75
δ_2 Declinación de la Luna	18° 51′ 18″, 67
δ'_2 " del Sol	— 18° 39′ 10″, 81
$-\varepsilon_2$ (Corrección)	$-18''$ 61
y_2 $(y_2 = \delta_2 + \delta'_2 - \varepsilon_2)$	+ 709,″ 25
log. $(\alpha_2 - \alpha'_2)$	3. 6999028
log. cos δ_2	9. 9760465
log x_2 $(x_2 = (\alpha_2 - \alpha'_2) \cos \delta_2)$	13. 6759493
x_2	4741,″ 87

CÁLCULO DE LA CORRECCIÓN ε_2

$$\varepsilon_2 = \frac{\text{sen } 2\, \delta_2 \ \ \text{sen}^2 \frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha'_2)}{\text{sen } 1''}$$

δ_2	18° 51′ 18″, 67
$2\, \delta_2$	37° 42′ 37″, 34
$\alpha_2 - \alpha'_2$	1° 23′ 30″, 75
$\frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha'_2)$	0° 41′ 45″, 37
log. sen $2\, \delta_2$	9. 7865174
log. sen $^2 \frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha'_2)$	16. 1688704
log. del numerador	25. 9553878
log. sen $1''$	4. 6855749
log ε_2	21. 2698129
ε_2	$18''$, 61

	x	Diff. = 3 x		y	Diff. = 3 y	
3 h.	—6775,67			—3565,50		
		—5763,62			—2197,74	
6 h.	—1012,05		x_0 = — 1919,59	—1367,76		y 0 = 712,46
		—5753,92			—2077,01	
9 h.	+4741,87			+ 709,25		

Siguiendo según (17) (18) (19) (20):

$$m \text{ sen } M = x_1 = 1012'', 05$$
$$m \cos M = y_1 = 1367'', 76$$

$$\text{tg } M = \frac{x_1}{y_1}$$

VII.

log x_1	13. 0052000
log y_1	3. 1360226
log tg M	9. 8691774
M	36° 29′ 52″, 86
log x_1	13. 0052000
log sen M	9. 7743673
log — m	3. 2308327

$$n \text{ sen } N = x_o = 1919'', 59$$
$$n \cos N = y_o = 712'', 46$$

$$\text{tg } N = \frac{x_o}{y_o}$$

log x_o	13. 2832084
log y_o	2. 8527604
log tg N	10. 4304480
N	69° 38′ 14″, 93
log x_o	13. 2832084
log sen N	9. 9719759
log—n	3. 3112325
M—N	33° 8′ 22″, 07
log cos (M—N)	9. 9229031
log m	3. 2308327
log m cos (M—N)	13. 1537358
log n	3. 3112325
log— $\frac{m}{n}$ cos (M—N)	9. 8425033
— $\frac{m}{n}$ cos (M—N)	—0 h, 6958
+ $\frac{m}{n}$ cos (M—N)	+0 h, 6958
ó	0 h 41 m 44 s, 99
T_o	6 h 00 m 00 s
T,	6 h 41 m 44 s, 99

encontraremos L según (8) (9)

π	3603″, 20
π'	8″, 96
s	683″, 50
s′	972″, 90
π, calculado según (7)	3597″, 31
π,—s′ + π'	2633″, 37
1/50 (π,—s′ +π')	52″, 67
s	983″, 50
L para la sombra	3669″, 54
π,+s′+π'	4579″, 17
1/50 (π, +s′ + π')	91″. 58
s	983″, 50
L′ para la penumbra	5654″, 25

Entonces tenemos para el principio y fin del eclipse

1. Sombra.

$$\text{sen } \psi = \frac{m \text{ sen } (M—N)}{L}$$

VIII.

log m	3. 2308327
log sen (M—N)	9. 7377323
log del numerador	12. 9685650
log L	3. 5646076
log sen ψ	9. 4039574
ψ	14° 41′ 2″, 44

$$\tau = \frac{L \cos \psi}{n}$$

log L	3. 5646076
log cos ψ	9. 9855785
log del numerador	13. 5501861
log n	3. 3112325
log τ	10. 2389536
τ	$\mp$ 1 h, 7336
τ	1 h 44 m 0 s, 96
T,	6 h 41 m 44 s, 99
T,—τ (Principio)	4 h 57 m 44 s, 03
T,+τ (Fin)	8 h 25 m 45 s, 95

2. Penumbra.

$$\text{sen } \psi = \frac{m \text{ sen } (M—N)}{L}$$

log m	3. 2308327
log sen (M—N)	9. 7377323
log del numerador	12. 9685650
log L′	3. 7523750
log sen ψ	9. 2161900
ψ	9° 28′ 7″, 39

$$\tau = \frac{L \cos \psi}{n}$$

Log L′	3. 7523003
los cos ψ	9. 9940752
log del numerador	13. 7464413
log n	3. 3112134
log τ	10. 435 784
τ	2 h, 239
τ	$\mp$2 h 43 m 26 s, 6
T,	6 h 41 m 44 s, 90
T,—τ (Principio)	3 h 58 m 18 s, 95
T,+τ (Fin)	9 h 25 m 11 s, 03

Balance.

4 h 57 m 44 s, 03—3 h 58 m 18 s, 95 = 0 h 59 m 25 s, 08
9 h 25 m 11 s, 03—8 h 25 m 45 s, 95 = 0 h 59 m 25 s, 08

Duración del eclipse.

9 h 25 m 11 s, 05—3 h 58 m 18 s, 95 = 5 h 26 m 52 s, 08

IX.

Magnitud del eclipse.

La calculamos según (16) y (17)

$$\Delta = \text{m sen (M—N)}$$

log m.	3. 2308327
log sen (M—N)	9. 7377323
log Δ	12. 9685650
Δ	930″,18

$$D = \frac{L-\Delta}{2\,s}$$

L	3669″, 54
Δ	930″, 18
L′—Δ	2739″, 36
2 s	1967, 00
log (L′—Δ)	3. 4376491
log 2 s	3. 2938044
log D	0. 1438447
D	1,392

Posición de los puntos de contacto con la sombra

Imágen dieecta.

$(180°+N+\psi')—360°$

ψ'= (180°—ψ)	165° 18′ 58″
N	69° 38′ 15″
+ 180°	180° 00′ 00″
(180°+N+ψ')	414° 57′ 13″
—360°	—360° 00′ 00″
Primer contacto	54° 57′ 13′

$360°—(N+\psi+180°)$

ψ	14° 41′ 2
N	69° 38′ 15′
+180°.	180° 00′ 00′
ψ+N+180°	264° 19′ 17′
360°—(N+ψ+180°) segundo contacto	95° 40′ 43′

SAN JOSÉ DE COSTA RICA.

Horas astronómicas medias de las cinco fases principales.

Entrada de la penumbra	3 h 58 m 18 s, 95
Entrada en la sombra	4 h 57 m 44 s, 03
Medio del eclipse	6 h 41 m 44 s, 99
Salida de la sombra	8 h 25 m 45 s, 95
Salida de la penumbra	9 h 25 m 11 s, 03
Ángulo al polo para la entrada en la sombra	N 54° 57′ 13″ E
Ángulo al polo para la salida de la sombra	N 95° 40′ 43″ W
Magnitud del eclipse	1,39

Pedro Reitz,
Jefe de servicio en el Instituto físico-geográfico